Ad-Soyad :

Numara :

Cevap Anahtarı

MAT 103 Lineer Cebir I Bütünleme Sınavı Soruları 02.02.2022

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır. Çözümlerinizi ayrıntılı olarak yazınız. Başarılar dilerim.

1) Aşağıdaki soruları yanında bulunan parantez içine doğru ise "D", yanlış ise "Y" yazarak cevaplayınız.

(Y) İki alt vektör uzayının birleşimi alt vektör uzayıdır.

(Y) Halkada her elemanın ikinci işleme göre tersi vardır.

(D) Lineer bağımlı bir kümede en az bir vektör diğerleri cinsinden yazılabilir.

(Y) V bir vektör uzayı olmak üzere $U \subset V$ alt kümesi lineer bağımsız ise U, V nin bir bazıdır.

(D) $L: U \to V$ bir lineer dönüşüm ise $L(0_U) = 0_V$ dir.

2) $\mathbb{R}^3$ ün $\{u_1 = (1,-1,1), u_2 = (0,1,-1), u_3 = (1,-2,1)\}$ bazı veriliyor. Eğer mümkünse bu bazdan ortonormal bir küme elde ediniz. Mümkün değilse nedenini açıklayınız.

3) $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bir lineer dönüşüm olmak üzere $L(1,0,0) = (1,-1,0)$, $L(0,1,0) = (0,-1,1)$, $L(0,0,1) = (-1,0,1)$ olsun. $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörü için $L(X) \in \mathbb{R}^3$ elemanını bulunuz.

4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ ün bir alt vektör uzayı olup olmadığını araştırınız.

5) V bir iç çarpım uzayı, U ve W ise V nin alt vektör uzayları olsun. $U \subset W$ ise $W^{\perp} \subset U^{\perp}$ olduğunu gösteriniz.

2) Verilen küme baz olduğundan lineer bağımsızdır. Bu lineer bağımsız kümeden önce ortogonal küme sonra da ortonormal bir küme elde edilebilir.

$$y_1 = u_1 = (1,-1,1)$$

$$y_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} y_1 = (0,1,-1) - \frac{\overbrace{\langle (0,1,-1),(1,-1,1)\rangle}^{-2}}{\underbrace{\langle (1,-1,1),(1,-1,1)\rangle}_{3}} (1,-1,1)$$

$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$y_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, y_2\rangle}{\langle y_2, y_2\rangle} y_2 - \frac{\langle u_3, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} y_1$$

$$= (1,-2,1) - \frac{\overbrace{\langle (1,-2,1),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\rangle}^{-1/3}}{\underbrace{\langle \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\rangle}_{\to \frac{2}{3}}} \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) - \frac{\overbrace{\langle (1,-2,1),(1,-1,1)\rangle}^{4}}{3} (1,-1,1)$$

$$= (1,-2,1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) - \frac{4}{3}(1,-1,1)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}, -2 + \frac{1}{6} + \frac{4}{3}, 1 - \frac{1}{6} - \frac{4}{3}\right)$$

$$= \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow \{y_1, y_2, y_3\}$ ortogonal kümedir.

Şimdi bu ortogonal kümeden ortonormal küme elde edelim.

$$e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} \Rightarrow \|y_1\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$$

$$e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} \Rightarrow \|y_2\| = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

$$e_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} \Rightarrow \|y_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow e_3 = \sqrt{2}\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$\therefore \{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal kümedir.

3) $X=(x_1,x_2,x_3)=(x_1,0,0)+(0,x_2,0)+(0,0,x_3)$

$=x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1)$ olarak yazılabilir.

$L(X)=L(x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1))$

$=x_1L(1,0,0)+x_2L(0,1,0)+x_3L(0,0,1)$ (L lineer)

$=x_1(1,-1,0)+x_2(0,-1,1)+x_3(-1,0,1)$

$=(x_1,-x_1,0)+(0,-x_2,x_2)+(-x_3,0,x_3)$

$=(x_1-x_3,-x_1-x_2,x_2+x_3)$

4) $x=y=z=0$ için $x+y+z=0 \Rightarrow (0,0,0)\in U \Rightarrow U\neq\emptyset$.

$U\subset\mathbb{R}^3$ olduğu açıktır.

$c\in\mathbb{R}$, $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in U \Rightarrow c(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)$ U ya ait mi?

$c(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(cx_1+x_2,cy_1+y_2,cz_1+z_2)$

$(cx_1+x_2)+(cy_1+y_2)+(cz_1+z_2)=c(x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2)$ ...(1)

olarak yazılabilir. $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in U$ olup U nun tanımından $x_1+y_1+z_1=0$, $x_2+y_2+z_2=0$ dır. Böylece, (1) eşitliği sıfıra eşit olur ve

$c(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\in U$ elde edilir. O halde, U, $\mathbb{R}^3$ ün alt vektör uzayıdır.

5) $U\subset W$ iken $W^\perp\subset U^\perp$ olduğunu göstereceğiz.

$\forall x\in W^\perp$ alalım. $x\in U^\perp$ olduğunu göstermeliyiz.

$\forall y\in U$ için $\langle x,y\rangle=0$ olduğunu gösterirsek $x\in U^\perp$ olur.

$y\in U,\ U\subset W \Rightarrow y\in W$

$x\in W^\perp,\ y\in W \Rightarrow \langle x,y\rangle=0$

$\therefore$ $U\subset W$ iken $W^\perp\subset U^\perp$ elde edilir.